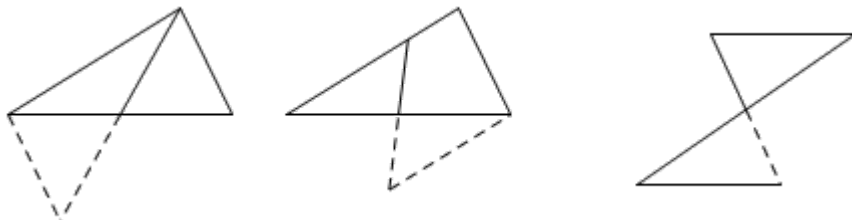


第2讲 中点辅助线综合

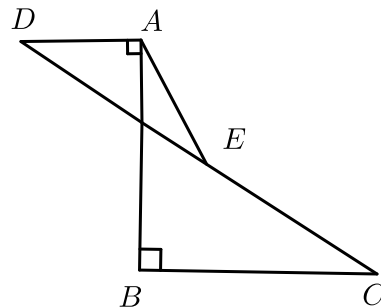
一、倍长中线

倍长中线常见模型：

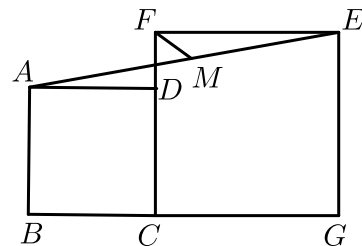


例题1

1. 如图，已知 $AB = 12$ ， $AB \perp BC$ 于 B ， $AB \perp AD$ 于 A ， $AD = 5$ ， $BC = 10$ 。点 E 是 CD 的中点，则 AE 的长为（ ）。



- A. 6 B. $\frac{13}{2}$ C. 5 D. $\frac{3}{2}\sqrt{41}$
2. 如图，正方形 $ABCD$ 和正方形 $CGEF$ 的边长分别是 2 和 3，且点 B, C, G 在同一直线上， M 是线段 AE 的中点，连接 MF ，则 MF 的长为（ ）。



- A. $\sqrt{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $2\sqrt{2}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{4}$

3. 请回答下列各题 .

(1) 方法回顾

在学习三角形中位线时 , 为了探索三角形中位线的性质 , 思路如下 :

第一步添加辅助线 : 如图1 , 在 $\triangle ABC$ 中 , 延长 DE (D 、 E 分别是 AB 、 AC 的中点) 到点 F , 使得 $EF = DE$, 连接 CF ;

第二步证明 $\triangle ADE \cong \triangle CFE$, 再证四边形 $DBCF$ 是平行四边形 , 从而得到 ____ . (直接填写三角形中位线性质定理)

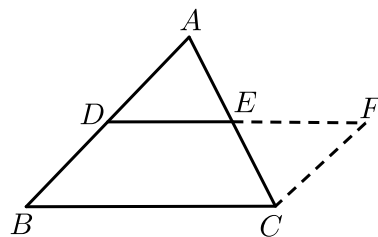


图 1

(2) 问题解决

如图2 , 在正方形 $ABCD$ 中 , E 为 AD 的中点 , G 、 F 分别为 AB 、 CD 边上的点 , 若 $AG = 2$, $DF = 3$, $\angle GEF = 90^\circ$, 求 GF 的长 .

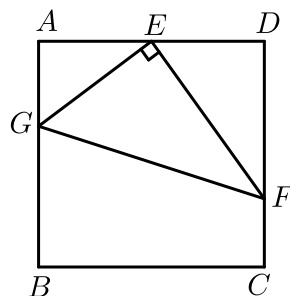


图 2

(3) 拓展研究

如图3 , 在四边形 $ABCD$ 中 , $\angle A = 105^\circ$, $\angle D = 120^\circ$, E 为 AD 的中点 , G 、 F 分别为 AB 、 CD 边上的点 , 若 $AG = 3$, $DF = 2\sqrt{2}$, $\angle GEF = 90^\circ$, 求 GF 的长 .

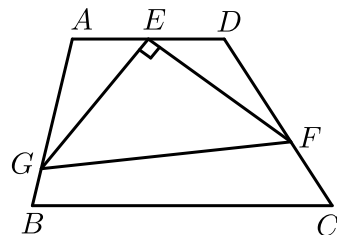


图 3

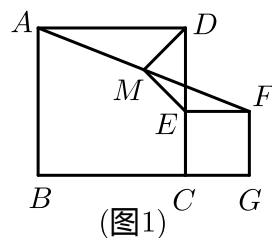
练习1

4. 已知正方形 $ABCD$ 与正方形 $CEFG$ （点 C 、 E 、 F 、 G 按顺时针排列）， M 是 AF 的中点，连接 DM ， EM 。

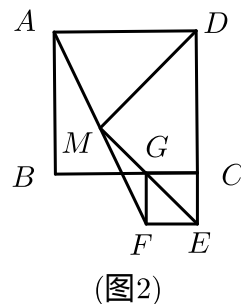
（1）如图1，点 E 在 CD 上，点 G 在 BC 的延长线上，

求证： $DM = EM$ ， $DM \perp EM$ 。

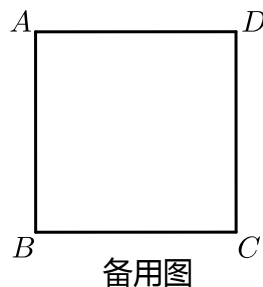
简析：由 M 是 AF 的中点， $AD \parallel EF$ ，不妨延长 EM 交 AD 于点 N ，从而构造出一对全等的三角形，即 $\triangle DNE \cong \triangle FME$ 。由全等三角形性质，易证 $\triangle DNE$ 是等腰直角三角形，进而得出结论。



（2）如图2， E 在 DC 的延长线上，点 G 在 BC 上，（1）中结论是否成立？若成立，请证明你的结论；若不成立，请说明理由。

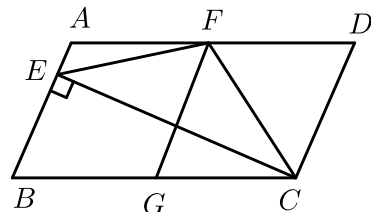


（3）当 $AB = 5$ ， $CE = 3$ 时，正方形 $CEFG$ 的顶点 C 、 E 、 F 、 G 按顺时针排列。若点 E 在直线 CD 上，则 $DM =$ $\frac{13}{2}$ ；若点 E 在直线 BC 上，则 $DM =$ $\frac{13}{2}$ 。



5. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中， $AD = 2AB$ ， $CE \perp AB$ 于点 E ，点 F 、 G 分别是 AD 、 BC 的中点，连接 CF 、 EF 、 FG ，下列结论：

- ① $CE \perp FG$ ；
- ② 四边形 $ABGF$ 是菱形；
- ③ $EF = CF$ ；
- ④ $\angle EFC = 2\angle CFD$ ．其中正确的个数是（ ）．

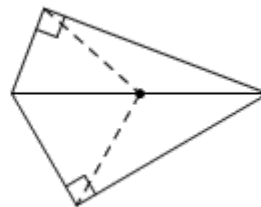
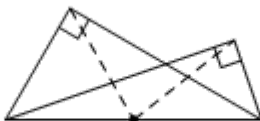


- A. 1个 B. 2个 C. 3个 D. 4个

二、 直角三角形斜边中线

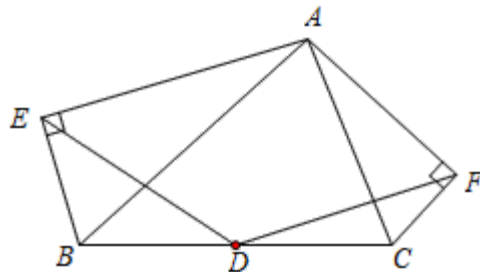
直角三角形斜边中线等于斜边_____，作直角三角形的斜边中线是常用辅助线。

斜边中线常见辅助线：



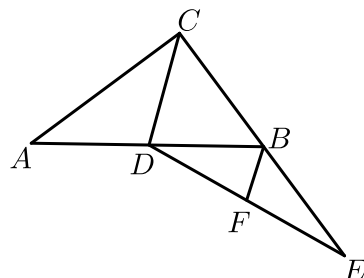
【典型模型】：构造斜边中线

如图，在 $\triangle ABC$ 中， D 为 BC 中点，以 AB 、 AC 为斜边构建 $\text{Rt}\triangle ABE$ 、 $\text{Rt}\triangle ACF$ ， $\angle AEB = \angle AFC = 90^\circ$ ， $\angle EAB = \angle FAC$ ，则 DE ___ DF ．



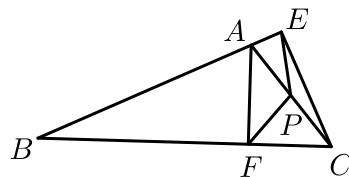
|| 例题2

6. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， CD 为中线，延长 CB 至点 E ，使 $BE = BC$ ，连接 DE ， F 为 DE 中点，连接 BF 。若 $AC = 8$ ， $BC = 6$ ，则 BF 的长为 ()。

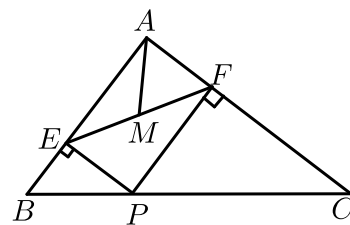


- A. 2 B. 2.5 C. 3 D. 4

7. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC$ 为钝角， AF 、 CE 都是这个三角形的高， P 为 AC 的中点，若 $\angle B = 40^\circ$ ，则 $\angle EPF =$ _____。

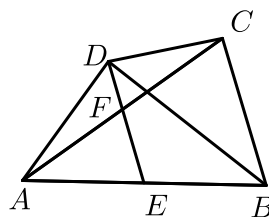


8. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = 3$ ， $AC = 4$ ， $BC = 5$ ， P 为边 BC 上一动点， $PE \perp AB$ 于 E ， $PF \perp AC$ 于 F ， M 为 EF 中点，则 AM 的最小值为 ()。



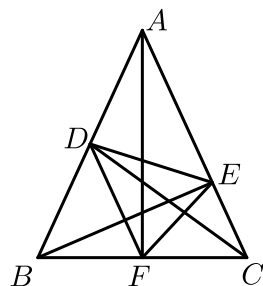
- A. $\frac{5}{4}$ B. $\frac{5}{2}$ C. $\frac{5}{3}$ D. $\frac{6}{5}$

9. 如图， AC ， BD 是四边形 $ABCD$ 对角线， $AD \perp BD$ ，点 E 是 AB 的中点，连接 DE 交 AC 于点 F ， $AF = CF$ ， $DF = \frac{1}{3}DE$ ，若 $BC = 12$ ，则 AB 长为 _____。

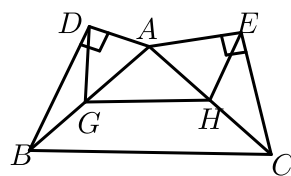


练习2

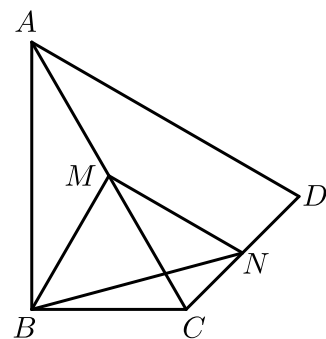
10. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC = 7$ ， $BC = 5$ ， $AF \perp BC$ 于 F ， $BE \perp AC$ 于 E ， D 是 AB 的中点，则 $\triangle DEF$ 的周长是_____。



11. 如图 $\triangle ABC$ 的周长为16， G 、 H 分别为 AB 、 AC 的中点，分别以 AB 、 AC 为斜边向外作 $\text{Rt}\triangle ADB$ 和 $\text{Rt}\triangle AEC$ ，连接 DG 、 GH 、 EH ，则 $DG + GH + EH$ 的值为()。

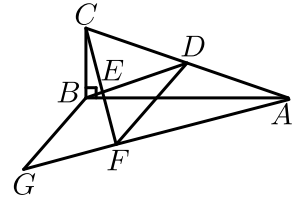


- A. 6 B. 7 C. 8 D. 9
12. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $AC = AD$ ， M ， N 分别为 AC ， CD 的中点，连接 BM ， MN ， BN 。



- (1) 求证： $BM = MN$ 。
- (2) $\angle BAD = 60^\circ$ ， AC 平分 $\angle BAD$ ， $AC = 2$ ，求 BN 的长。

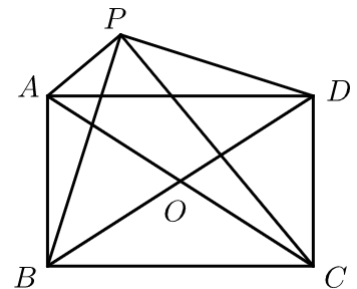
13. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 90^\circ$ ， BD 为 AC 的中线，过点 C 作 $CE \perp BD$ 于点 E ，过点 A 作 BD 的平行线，交 CE 的延长线于点 F ，在 AF 的延长线上截取 $FG = BD$ ，连接 BG 、 DF 。若 $CF = 6$ ， $AC = AF + 2$ ，则四边形 $BDFG$ 的周长为（ ）。



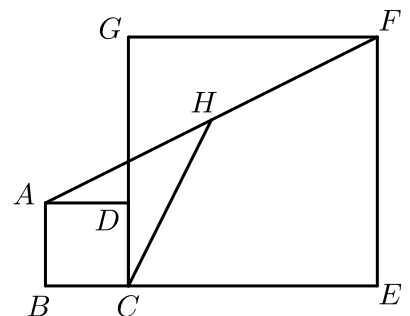
- A. 9.5 B. 10 C. 12.5 D. 20

|| 例题3

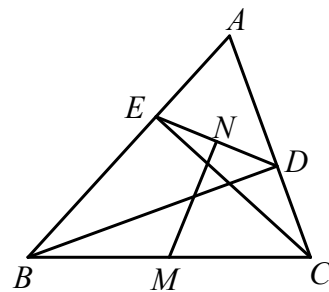
14. 如图，平行四边形 $ABCD$ 中， AC ， BD 交于点 O ， P 是平行四边形 $ABCD$ 外一点，且 $\angle APC = \angle BPD = 90^\circ$ ，求证：平行四边形 $ABCD$ 是矩形。



15. 如图，正方形 $ABCD$ 和正方形 $CEFG$ 中，点 D 在 CG 上， $BC = 1$ ， $CE = 3$ ，点 H 是 AF 的中点，那么 CH 的长是 _____。



16. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $BD \perp AC$ 于 D ， $CE \perp AB$ 于 E ， M ， N 分别是 BC ， DE 的中点．

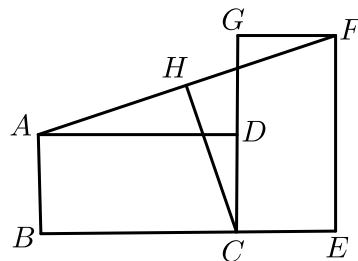


(1) 求证： $MN \perp DE$ ．

(2) 若 $BC = 20$ ， $DE = 12$ ，求 $\triangle MDE$ 的面积．

练习3

17. 如图，矩形 $ABCD$ 和矩形 $CEFG$ 中， $AD = CG = 4$ ， $AB = CE = 2$ ，连接 AF ， H 是 AF 的中点，那么 CH 的长是（ ）．



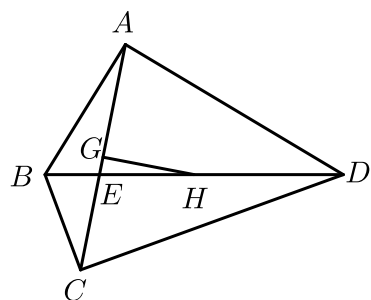
A. $2\sqrt{5}$

B. $2\sqrt{3}$

C. $\sqrt{10}$

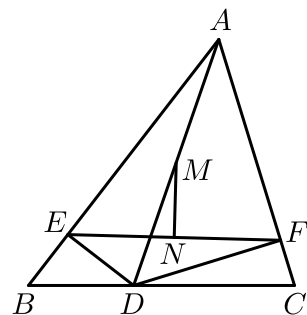
D. 4

18. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $\angle BCD = \angle BAD = 90^\circ$ ， AC 、 BD 相交于点 E ， G ， H 分别是 AC ， BD 的中点，如果 $\angle BEC = 80^\circ$ ，那么 $\angle GHE$ 的度数是 _____ 。



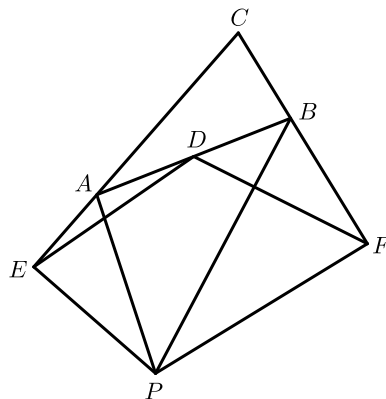
19. 共斜边模型的应用：

- (1) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， D 是 BC 边上一点，过 D 点作 $DE \perp AB$ 于 E ， $DF \perp AC$ 于 F ， M 、 N 分别是 AD 、 EF 的中点。求证： $MN \perp EF$ 。



|| 例题4

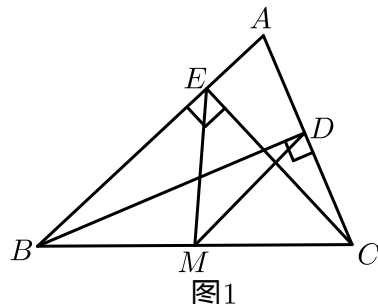
20. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， D 为 AB 的中点，分别延长 CA 、 CB 到点 E 、 F ，使 $DE = DF$ ，过 E 、 F 分别作 CA 、 CB 的垂线，相交于 P 。求证： $\angle PAE = \angle PBF$ 。



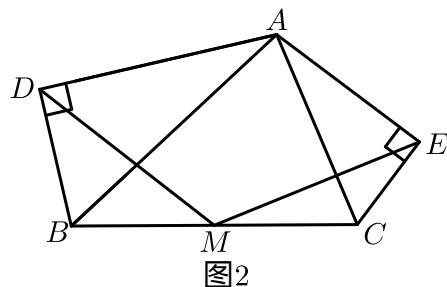
练习4

21. 在 $\triangle ABC$ 中， M 是 BC 边的中点．

- (1) 如图1， BD ， CE 分别是 $\triangle ABC$ 的两条高，连接 MD ， ME ，则 MD 与 ME 的数量关系是_____；若 $\angle A = 70^\circ$ ，则 $\angle DME =$ _____°．



- (2) 如图2，点 D ， E 在 $\angle BAC$ 的外部， $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACE$ 分别是以 AB ， AC 为斜边的直角三角形，且 $\angle BAD = \angle CAE = 30^\circ$ ，连接 MD ， ME ．



- ① 判断(1)中 MD 与 ME 的数量关系是否仍然成立，并证明你的结论．
- ② 求 $\angle DME$ 的度数．
- (3) 如图3，点 D ， E 在 $\angle BAC$ 的内部， $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACE$ 分别是以 AB ， AC 为斜边的直角三角形，且 $\angle BAD = \angle CAE = \alpha$ ，连接 MD ， ME ．直接写出 $\angle DME$ 的度数（用含 α 的式子表示）．

